	Devoir de contrôle n°2 4 M_{1+2}	Durée :2H

EXERCICE N°1

A

Soit f la fonction définie sur $]1\,,\,+\infty[$ par $f(x) = -x + \dfrac{1}{x^2-1}$.

1/ a) Etudier les variations de f.

b) Tracer la courbe représentative de f selon un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

2/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]1\,,\,+\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < \sqrt{2}$.

3/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} = x$.

B

Soit g la fonction définie sur IR_+^* par $g(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$.

1/ Montrer que : $\forall\, x \in [1\,,\,+\infty[\quad |g'(x)| \le \dfrac{1}{2}$.

2/ Montrer que g réalise une bijection de $]0\,,\,+\infty[$ sur un intervalle I à préciser.

3/ Trouver pour tout $x \in I \quad g^{-1}(x)$.

4/ Tracer dans un repère orthonormé les courbes représentatives de g et de g^{-1}.

5/ Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : $U_0 = 1$ et $\forall\, n \in IN \quad U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN \quad U_n \ge 1$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN \quad |U_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et trouver sa limite.

EXERCICE N°2

ABCD un carré de centre O tel que : $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

I , J , K et H les milieux respectifs des segments [AB] , [BC] , [CD] et [DA] .
E un point du segment [AB] , F un point du segment [BC] tel que BF = AE .

I

1/ a) Montrer que les droites (HK) et (IJ) sont parallèles à la droite (AC).

b) Montrer que la droite (AC) est la médiatrice de [IH].

2/ a) Déterminer la droite Δ tel que $t_{\overrightarrow{IH}} = S_{(AC)} \circ S_{\Delta}$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications suivantes :

$S = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{IH}}$

$R = S_{(AC)} \circ S_{(JH)}$

$t = S_{(JH)} \circ S_{(AB)}$

Voir suite au verso

$\boxed{\text{II}}$

1/ Montrer qu'il existe un unique déplacement φ qui envoie A sur B et E sur F.

2/ a) Montrer que φ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Montrer que (OE) $\perp$ (OF) en déduire que les points E , B , F et O appartiennent à un même cercle.

3/ Montrer que $\varphi(D) = A$ en déduire que (ED) $\perp$ (AF).

4/ a) Montrer qu'il existe un unique déplacement ψ qui envoie D sur E et F sur C.

b) Montrer que la droite (EC) est globalement invariante par $\psi \circ \varphi$.

$\boxed{\text{III}}$

1/ Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui envoie A sur B et E sur F.

2/ a) Montrer que $g = \varphi \circ S_{(AB)}$.

b) En déduire que $g = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{IK}}$.

3/ En remarquant que $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HK}$. Montrer que g est une symétrie glissante dont-on déterminera l'axe et le vecteur.

4/ Montrer que le milieu du segment [EF] est un point de la droite (IJ).